Padéjeva aproksimacija

Tina Rihar pri predmetu Seminar 2, 2010
Mentor: dr. Milan Hladnik

1 Uvod

Aproksimacijo, o kateri bomo pisali v nadaljevanju, je razvil francoz Henri Padé, ki je živel med leti 1863 in 1953, za začetek pa si oglejmo Taylorjevo vrsto, ki smo jo spoznali že v 1. letniku. Vsi vemo, da za izvedbo le-te potrebujemo dano funkcijo *f*, ki jo potem skušamo aproksimirati s polinomom. Vemo, da nam recimo prvi odvod v 0 pove, kako aproksimirati krivuljo $y = f(x)$ z ravno črto oziroma tangento na krivuljo. Če na hitro ponovimo na primeru:

Zgled 1 *V 5. poglavju smo se že srečali s funkcijo $y = ln(1 + x)$. Vemo, da je za poljubno funkcijo f aproksimacija s tangento enaka*

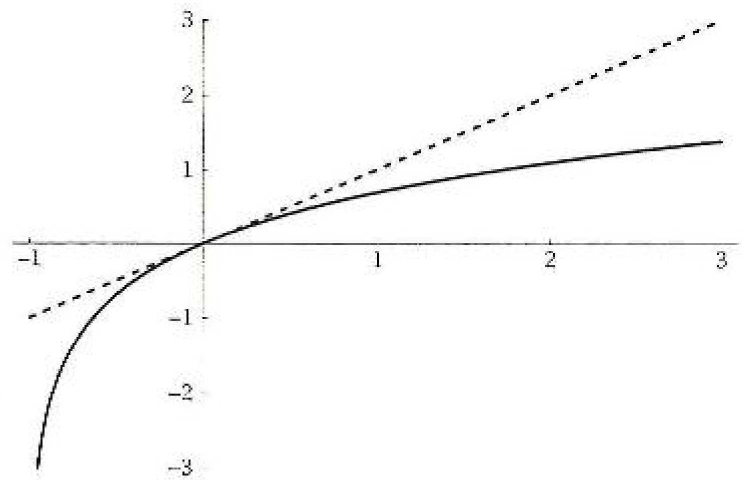
$$y = f(0) + f'(0)x$$

-torej linearno funkcijo aproksimiramo takole:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x,$$

kar je precej točna aproksimacija, če je le x blizu 0. Logaritemsko funkcijo smo v 5. poglavju spoznali zato, da bomo lahko sedaj uporabili aproksimacijo

$$ln(1 + x) \approx x.$$



Če hočemo izboljšati aproksimacijo s tangento, se zdi naravno, da poskusimo najti kvadratno funkcijo $x \mapsto a + bx + cx^2$, ki opravi boljše delo od linearne funkcije. Tangenta je določena z dvema podatkoma - v izbrani točki ima enako vrednost kot dana funkcija in pa tudi enak naklon. V algebraičnem smislu to pomeni, da funkciji na obeh straneh enačbe zavzameta isti vrednosti - $f(0)$ v $x = 0$ in $f'(0)$ v $x = 0$. Kvadratična aproksimacija je dobra, ker se vrednost funkcije, njen odvod in njen drugi odvod vsi ujemajo z vrednostjo funkcije f v točki $x = 0$. Kot že vemo, izgleda takole:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

V splošnem je n-ta Taylorjeva aproksimacija polinom stopnje n, ki zadošča n+1 pogojem: njegova vrednost in njegovih prvih n odvodov v 0 so vsi enaki vrednosti funkcije f. Aproksimacija torej izgleda takole:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}x^n.$$

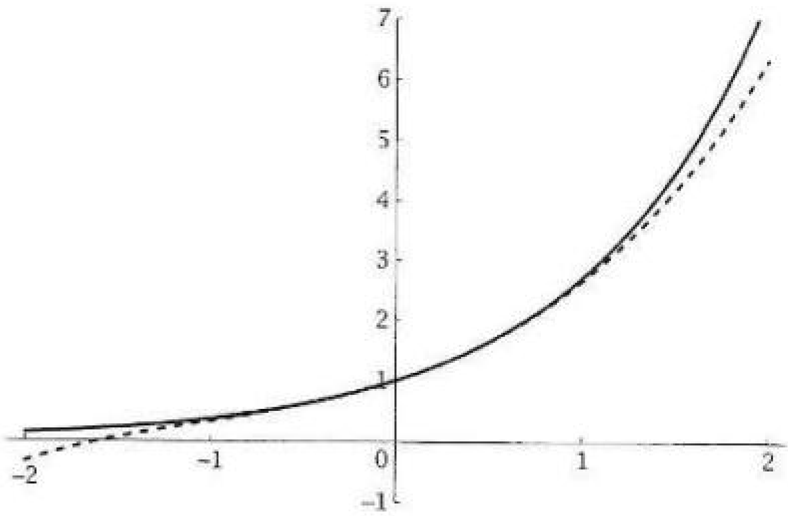
Točnost Taylorjeve aproksimacije pa je precej odvisna od funkcije, ki jo aproksimiramo. Poglejmo si nekaj primerov:

Zgled 2 *Če je f eksponentna funkcija $x \mapsto e^x$, potem so vsi njeni odvodi enaki, torej je $f^{(n)}(0) = 1$ za vsak n. Taylorjeva aproksimacija je zato takšna:*

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Na grafu imamo narisano eksponentno funkcijo in njeno kubično aproksimacijo $1+x+x^2/2+x^3/6$ na intervalu $-2 < x < 2$. Vidimo, da se kar dobro ujemata in če bi nadaljevali z aproksimacijami višjega reda, bi bilo ujemanje še boljše. V bistvu, ne glede na vrednost x-a, se aproksimacije bližajo funkciji e^x, ko večamo n, kar izrazimo tako, da eksponentno funkcijo zapišemo z neskončno vsoto

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

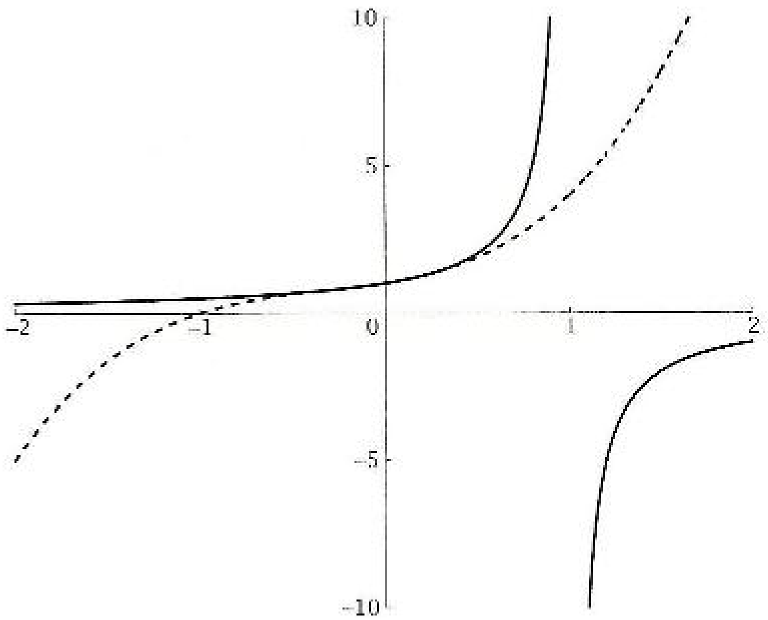


Zgled 3 *Kaj pa, če si ogledamo funkcijo*

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}?$$

Taylorjeva aproksimacija za to funkcijo je

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + \ldots + x^n.$$



Na grafu je narisana kubična aproksimacija $1 + x + x^2 + x^3$ *na intervalu* $-2 < x < 2$. *Kljub temu, da je aproksimacija dobra, če je x blizu 0, pa je izjemno slaba zunaj intervala* $[-1, 1]$, *kar pa nas v resnici ne sme presenetiti. Graf funkcije* $y = \frac{1}{1-x}$ *ima namreč navpično asimptoto pri* $x = 1$, *kjer funkcija pobegne v neskončnost. Polinomi, na drugi strani, pa so funkcije, ki se obnašajo zelo lepo, s čimer mislimo, da nam ne morejo uiti v neskončnost. Iz tega dejstva pa sledi, da aproksimacija nikakor ne more slediti funkciji, ko gre x proti 1. Ko aproksimacijacijski polinom ne pokriva več dane funkcije, ni nobenega razloga, da bi jo spet pokrival za kak kasnejšen x. V našem primeru smo lahko povsem prepričani, da aproksimacija ni niti malo podobna dani funkciji takoj, ko je* $x > 1$. *Če pa je x med -1 in 1, pa se aproksimacije res bližajo funkciji* $\frac{1}{1-x}$, *torej za x-e s tega intervala lahko zapišemo funkcijo kot vsoto neskončne geometrijske vrste:*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots.$$

Na primer, če je $x = 1/2$, *dobimo*

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2.$$

Kakorkoli, z grafa lahko vidimo, da aproksimacija ni dobra, če je x levo od -1, čeprav funkcija v točki $x = -1$ *ne naredi nič čudnega. Ta fenomen je karakteristika Taylorjeve aproksimacije. Vprašanje, če vsota* $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$ *limitira h kaki vrednosti, ko n raste, je odvisno predvsem od vrednosti x-a, ne pa od tega ali je x pozitiven ali negativen. To pa pomeni, da se bodo težave za* $x \geq 1$ *odražale tudi kot težave levo od* $x = -1$. *Slabo obnašanje funkcije* $\frac{1}{1-x}$ *v točki* $x = 1$ *povzroči, da grejo stvari narobe tudi, ko je x večji od 1 in potem narava aproksimacije poskrbi za to, da bodo težave tudi, ko je x enako velik, a negativen.*

Taylorjeva aproksimacija je v matematiki zelo uporabna, ima pa dve napaki, razvidni iz zgornjih primerov:

1. Polinomi so zelo lepe funkcije, zato težko dobro aproksimirajo „grde“ funkcije.

2. Obnašanje polinoma na enem delu domene močno vpliva na obnašanje na preostalem območju, zato problem v eni točki porodi probleme v še večih točkah.

V naslednjem poglavju pa si bomo ogledali drugačno aproksimacijo, ki je pogosto boljša od Taylorjeve.

2 Aproksimacija z racionalnimi funkcijami

Racionalna funkcija, kot vemo, je taka, ki jo lahko zapišemo kot količnik polinomov, npr.

$$x \mapsto \frac{1+3x}{2+4x+x^2}.$$

Take funkcije so precej bolj fleksibilne kot polinomi. Za začetek, grafi racionalnih funkcij imajo lahko navpične asimptote, kot jo je imela funkcija v prejšnjem zgledu. Za namene numerične izračunave so racionalne funkcije prav tako dobre kot polinomi: njihove vrednosti lahko računamo zelo enostavno. V nasprotju s polinomi pa nimajo takih zadržkov do grdega obnašanja. V prejšnjem zgledu smo s polinomi skušali aproksimirati funkcijo $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Očitno je ne bo težko aproksimirati z racionalno funkcijo, saj je že sama po sebi racionalna funkcija - aproksimiramo jo torej lahko kar samo s sabo, in to zelo dobro. Če pa hočemo preizkusiti, če so racionalne funkcije res boljše od polinomov, pa moramo vzeti malo bolj zahteven primer, recimo logaritem.

Zgled 4 *Na začetku smo že nekaj omenjali linearno aproksimacijo iz 5. poglavja:*

$$ln(1+x) \approx x.$$

Ta aproksimacija je prvi člen Taylorjeve vrste

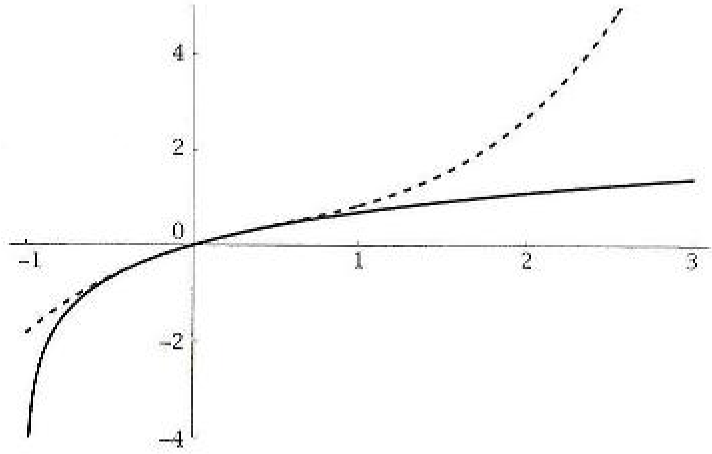
$$ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots.$$

Slika nam kaže graf funkcije $y = ln(1+x)$ in njene kubične aproksimacije

$$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Opazimo problem, ki smo ga morda že pričakovali: krivulja $y = ln(1+x)$ ima navpično asimptoto pri $x = -1$, kar pomeni, da bo aproksimacija napačna, ko se bo x približeval -1. Ker gre za Taylorjev polinom, pa se bo graf slabo obnašal tudi za $x > 1$.
Primerjajmo sedaj to z racionalno funkcijo, da vidimo, če se bo bolje odrezala. Kubični polinom $a + bx + cx^2 + dx^3$ ima štiri koeficiente - štiri stopnje svobode. Pričakujemo, da bomo lahko naredili boljšo aproksimacijo, če imamo svobodo izbire za štiri koeficiente. Naredimo torej test, poskusimo z racionalno funkcijo s samo štirimi koeficienti, na primer

$$x \mapsto \frac{a+bx}{c+dx}.$$



V želji po določitvi koeficientov, bomo oponašali Taylorjevo vrsto. Težimo k temu, da bo imela naša racionalna funkcija enako vrednost in enakih prvih nekaj odvodov v 0, kot logaritem. Takemu načinu sestavljanja racionalne funkcije pa rečemo Padéjeva aproksimacija.
Označimo z f funkcijo, ki jo bomo aproksimirali $x \mapsto ln(1+x)$ in z r Padéjev aproksimant:

$$r(x) := \frac{a+bx}{c+dx}.$$

Najprej:

$$r(0) = \frac{a}{c}, \text{ medtem ko je } f(0) = ln1 = 0,$$

torej moramo izbrati $a = 0$, če hočemo, da bo $r(0) = f(0)$. Zdaj vemo, da bo naš aproksimant oblike

$$r(x) = \frac{bx}{c+dx}.$$

Njegovi odvodi in odvodi logaritma so

$$r'(x) = \frac{bc}{(c+dx)^2} \text{ in } f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Da bosta odvoda enaka v 0 mora biti $bc/c^2 = 1$, od kjer sledi $b = c$. Aproksimant lahko zdaj torej zapišemo kot

$$r(x) = \frac{cx}{c+dx}.$$

Druga odvoda sta enaka

$$r''(x) = \frac{-2c^2d}{(c+dx)^3} \text{ in } f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}.$$

Da bosta enaka pri $x = 0$, zahtevamo, da je

$$\frac{-2c^2d}{c^3} = -1,$$

torej da je $d = c/2$. Aproksimant ima zdaj sledečo obliko

$$r(x) = \frac{cx}{c+cx/2},$$

kar je enako kot

$$r(x) = \frac{x}{1+x/2} = \frac{2x}{2+x}.$$

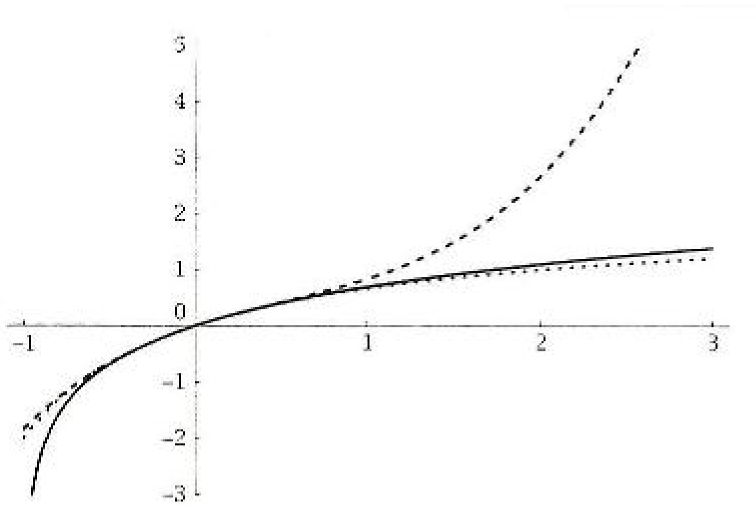
Koeficient c na tej fazi izgine, zato ne moremo dobiti drugačnega odvoda, če izberemo vrednost c-ja. V bistvu bi lahko predvideli, da se bo to zgodilo, saj je izraz

$$\frac{a+bx}{c+dx}$$

enak izrazu

$$\frac{(a/c)+(b/c)x}{1+(d/c)x},$$

torej je funkcija avtomatično določena samo s tremi številkami: a/c, b/c in d/c. Ker smo ugotovili, da ima racionalna funkcija samo tri prostostne stopnje, in ne štiri, bi jo bilo morda nepravično primerjati s kubično Taylorjevo aproksimacijo, ampak bomo to vseeno storili. Graf kaže logaritemsko funkcijo (polna črta), kubično Taylorjevo aproksimacijo (črtkana črta) in novo Padéjevo aproksimacijo (pikčasta črta). V okolici točke $x=-1$ Padéjeva aproksimacija ne izgleda dosti boljše od Taylorjeve, desno od točke $x=1$, pa je razlika več kot očitna. Z racionalnimi funkcijami torej odpravimo 2. napako polinomov, saj imamo sedaj težave samo še na enem delu grafa, ne pa na vseh.



Zdaj pa nas zanima, če lahko proces nadaljujemo in poiščemo racionalne aproksimacije višjih stopenj? Na naslednji stopnji bi radi našli racionalno aproksimacijo oblike

$$\frac{a+bx+cx^2}{d+ex+gx^2},$$

katere odvodi v točki 0 se čim bolj ujemajo s tistimi od funkcije $ln(1+x)$. Zdaj se je bralec najbrž prestrašil ob misli, da bi moral n-krat odvajati to racionalno funkcijo, vendar se temu na srečo lahko izognemo. Vemo že, da so odvodi funkcije $ln(1+x)$ v točki 0 določeni s Taylorjevo vrsto

$$ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots.$$

Naš cilj je najti koeficiente a, b, c, d, e, g, za katere bo začetek Taylorjeve vrste za

$$\frac{a+bx+cx^2}{d+ex+gx^2}$$

izgledal takole

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots.$$

To pomeni, da želimo izbrati koeficiente na tak način, da za x blizu 0 velja:

$$\frac{a+bx+cx^2}{d+ex+gx^2} \approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots.$$

To pa je za x blizu 0 enako kot,

$$a+bx+cx^2 \approx \left(d+ex+gx^2\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots\right).$$

Če zmnožimo desno stran in zberemo koeficiente glede na enako stopnjo x-a, dobimo

$$dx+\left(e-\frac{d}{2}\right)x^2+\left(g-\frac{e}{2}+\frac{d}{3}\right)x^3+\left(\frac{-g}{2}+\frac{e}{3}-\frac{d}{4}\right)x^4+\dots.$$

Z namenom, da za majhne x-e ta izraz približamo izrazu $a+bx+cx^2$, „primerjamo koeficiente“ pri istih potencah x-ov. Čeprav iščemo šest koeficientov, imamo samo pet stopenj svobode, zato bomo lahko primerjali le pet parov koeficientov. Sedaj bomo zapisali obe stani enačbe, eno pod drugo, da ju bomo lažje primerjali:

$$a+bx+cx^2,$$
$$dx+\left(e-\frac{d}{2}\right)x^2+\left(g-\frac{e}{2}+\frac{d}{3}\right)x^3+\left(\frac{-g}{2}+\frac{e}{3}-\frac{d}{4}\right)x^4+\dots.$$

Na ta način bomo izpisali pet linearnih enačb:

$$\begin{aligned}
a &= 0,\\
b &= d,\\
c &= e-\frac{d}{2},\\
0 &= g-\frac{e}{2}+\frac{d}{3},\\
0 &= \frac{-g}{2}+\frac{e}{3}-\frac{d}{4}.
\end{aligned}$$

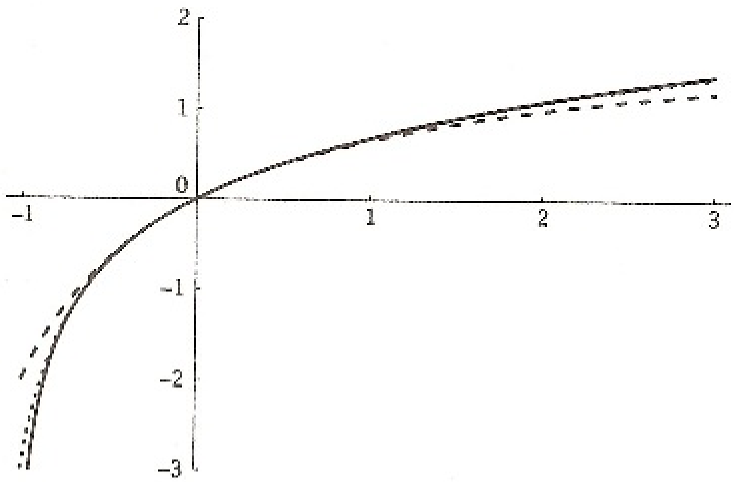
Ta sistem rešimo in dobimo na primer

$$\begin{aligned}
e &= 6g,\\
d &= 6g,\\
c &= 3g,\\
b &= 6g,\\
a &= 0.
\end{aligned}$$

Ko iz tega sestavimo Padéjev aproksimant, se vsi g-ji pokrajšajo in dobimo

$$\frac{6x+3x^2}{6+6x+x^2}.$$

Naslednja slika nam kaže novo aproksimacijo (pikčasto) in prejšnjo aproksimacijo za primerjavo (črtkano). Vidimo, da se je aproksimacija zalo izboljšala.



Če poskušamo zgraditi aproksimacije še višjih stopenj, bo postopek še vedno deloval. Padéjev aproksimant naslednje (tretje) stopnje je

$$\frac{60x + 60x^2 + 11x^3}{60 + 90x + 36x^2 + 3x^3}.$$

Ta funkcija se komaj kaj loči od logaritemske krivulje na celotnem območju grafa, ki je prikazan zgoraj. Ampak tukaj pride do problema. V nasprotju s Taylorjevo vrsto, je težko videti kakršenkoli vzorec za zaporedje racionalnih aproksimacij.

Če pogledamo Taylorjevo aproksimacijo

$$x$$
$$x - \frac{x^2}{2}$$
$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$
$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

je vzorec takoj očiten. Razen spremembe predznakov, so koeficienti 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, in tako naprej. Kar nam resnično malce olajša najti vzorec, je, da se vsakič, ko dodamo naslednji člen, formula spremeni zelo malo: prve aproksimacije nam pokažejo skoraj vse, kar vidimo v poznejših. Če pa pogledamo Padéjeve aproksimacije, pa ne vidimo, da bi bila prva aproksimacija kakršenkoli del druge - izgleda kot, da se je vse glede funkcije spremenilo. Na srečo pa obstaja tak način za grajenje aproksimacij, da lahko vidimo prejšnje aproksimacije vložene v poznejših. Na primer, druga aproksimacija je

$$\frac{6x + 3x^2}{6 + 6x + x^2} = \frac{2x}{2 + x - \frac{x^2}{6+3x}},$$

in prva funkcija, 2x/(2+x), je jasno vidna v izrazu na desni. Še več, če je x blizu 0, je tudi x^2 blizu 0, tako da lahko vidimo zakaj se druga aproksimacija skoraj spremeni v prvo, ko je x majhen. Izraz na desni spominja na verižne ulomke iz 8.poglavja, le da ta vsebuje spremenljivko x. To nam da namig za nadaljevanje. Tretja aproksimacija je

$$\frac{60x + 60x^2 + 11x^3}{60 + 90x + 36x^2 + 3x^3} = \frac{2x}{2 + x - \frac{x^2}{6+3x-\frac{4x^2}{10+5x}}}.$$

Kot smo upali, lahko vidimo prvo in drugo aproksimacijo kot del tretje. Sedaj pa se nam postavi vprašanje, če lahko ugotovimo vzorec. Dejstvo, da lahko zapišemo aproksimacije na način, ki nam jih razkriva po korakih, nam ne zagotavlja, da obstaja enostaven vzorec, daje nam le upanje, da ga bomo odkrili. Zaporedni imenovalci,

$$2 + x, 6 + 3x, 10 + 5x,$$

izgledajo podobno: to so prvi trije produkti izraza $2 + x$ z lihimi števili. Če obstaja vzorec, so lahko števci malo težje prepoznavni, ampak po nekaj dodatnih korakih vidimo, da ni dvoma o vzorcu, ki ga iščemo:

$$\cfrac{2x}{2+x-\cfrac{x^2}{6+3x-\cfrac{4x^2}{10+5x-\cfrac{9x^2}{14+7x-\cfrac{16x^2}{18+9x-\ddots}}}}}.$$

Imenovalci so torej res $2+x, 3(2+x), 5(2+x)$ in tako naprej. Števci pa so $x^2, (2x)^2, (3x)^2, (4x)^2$. Torej je kvocient na mestu (k+1) ulomka enak:

$$-\frac{k^2x^2}{(2k+1)(2+x)}.$$

Avtor članka je zaporedne kvociente v ulomkih izračunal s pomočjo računalnika. Ta verižni ulomek, kakor tudi naslednji, ki se bodo pojavljali v nadaljevanju poglavja, so namreč najbolj nepričakovane formule v matematiki. Ponavadi, preden prvič srečamo neko formulo, imamo za sabo že določen proces odkrivanja, ki nam vzame veliko časa. Na določeni točki v tem procesu, preden ugotovimo, kaj bo točna formula, se zavemo nekega vzorca - torej imamo pravico pričakovati vzorec, čeprav ne vemo, natančno kakšen je. S temi verižnimi ulomki pa se ne moremo znebiti občutka, da jih nimamo pravice pričakovati. Ti so tam le po nekem čudežu in jih lahko razumemo šele pozneje, če sploh.

Da se o tem prepričamo, zapišimo prvih nekaj korakov verižnega ulomka za funkcijo sinus. Funkcija $x \mapsto \text{sin x}$ ima Taylorjevo vrsto z zelo jasnim in enostavnim vzorcem:

$$\text{sin x} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots .$$

Njegov verižni ulomek pri 0 se začne kot

$$\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{6-\cfrac{7x^2}{10+\cfrac{11x^2}{98-\cfrac{551x^2}{198+\ddots}}}}}$$

in postaja vedno bolj zapleten. Funkciji sinus in kosinus nimata verižnih ulomkov, ki bi bili enostavni za opisati. Preseneti pa nas dejstvo, da je pri tretji izmed trigonometričnih funkcij, tangensu, stvar drugačna.

3 Literatura

- Keith Ball, *Strange Curves, Counting Rabbits, and Other Mathematical Explorations,* Princeton University Press 2003, str. 189-202

- http://en.wikipedia.org/wiki/Pad%C3%A9_approximant

- http://en.wikipedia.org/wiki/Henri_Pad%C3%A9